První cvičení

Na prvním cvičení začneme zlehka: povětšinou se jen ujistíme, že již známe všechna potřebné, abychom se mohli bezpečně vypravit do krás lineární algebry..

Číselné obory Za algebraické operace se v považují: sčítání, odčítání, násobení, dělení (nenulovým číslem), mocnění a odmocňování. Rozmyslete si, které z těchto operací umíme vždy provádět v nám dosud známých číselných oborech – $\mathbb{N}$[1],$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$: například v přirozených číslech umíme určitě sčítat, protože výsledek operace $a+b$ je pro libovolná dvě přirozená čísla a, b opět přirozené číslo; na druhou stranu zde obecně neumíme odčítat: $17-13$ je přirozené číslo, ale $5-8$ již ne.

1. Doplňte následující tabulku podle toho, zda v daném číselném oboru umíme tu kterou algebraickou operaci obecně provádět:

	$+$	$-$	$\times$	$\div$	$^\wedge n$	$\sqrt[n]{\ }$
$\mathbb{N}$	✓	✗	✓	✗	✓	✗
$\mathbb{Z}$						
$\mathbb{Q}$						
$\mathbb{R}$						
$\mathbb{C}$						

[

	$+$	$-$	$\times$	$\div$	$^\wedge n$	$\sqrt[n]{\ }$
$\mathbb{N}$	✓	✗	✓	✗	✓	✗
$\mathbb{Z}$	✓	✓	✓	✗	✓	✗
$\mathbb{Q}$	✓	✓	✓	✓	✓	✗
$\mathbb{R}$	✓	✓	✓	✓	✓	✗
$\mathbb{C}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓

]

Schopnost provádět algebraické operace[2] je velice důležitá pro řešení rovnic (s polynomy):

- rovnice $x-5=8$ má řešení v každém oboru, protože operaci $8+5$ umíme vždy provést
- rovnice $x+3=2$ ale v přirozených číslech (tedy pro $x \in \mathbb{N}$) řešení mít nebude; zato má řešení v každém oboru, kde umíme provést operaci „$-$“

Velkou výhodou komplexních čísel je pak to, že každý polynom zde má kořen(y), tj. i každá rovnice obsahující pouze polynomy má řešení. Ujistěme se tedy, že v $\mathbb{C}$ umíme všechny důležité operace ($\overline{z}$ značí komplexní sdružení):

2. Položme $z_1 = 2-i$, $z_2 = 1+3i$. Spočtěte a u každého výsledku určete reálnou část $\mathbf{Re}\,(\mathrm{w})$ a imaginární část $\mathbf{Im}\,(\mathrm{w})$:

   (a) $w = z_1 + z_2$ $[3+2i, \mathbf{Re}\,(\mathrm{w}) = 3, \mathbf{Im}\,(\mathrm{w}) = 2]$

[1] pozor, že 0 **je** pro naše potřeby přirozené číslo

[2] Všimněte si, že v tabulce operací je vždy trojice „sčítání - násobení - mocnění“ spolu. Je to proto, že vynásobit číslo a (přirozeným) číslem k znamená k-krát dokola provést sčítání a s a: $k \cdot a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{k-\text{krát}}$; podobně umocnit a na (přirozené) číslo k znamená číslo a vynásobit k-krát samo se sebou, tedy $a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{k-\text{krát}}$. Člověka by mělo napadnout, jestli by se nedalo podobně jít dál i s mocněním: $\left. a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}} \right\} k - \text{krát}$. S touto myšlenkou už nás ale před několika desetiletími předběhli. Že to má své „praktické“ využití, si můžete ověřit třeba zde.

(b) $w = z_1 - z_2$ $[1-4i, \mathbf{Re}\,(\mathrm{w}) = 1, \mathbf{Im}\,(\mathrm{w}) = -4]$

(c) $w = z_1 \cdot z_2$ $[5+5i, \mathbf{Re}\,(\mathrm{w}) = 5, \mathbf{Im}\,(\mathrm{w}) = 5]$

(d) $w = z_1 : z_2$ $[-\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i, \mathbf{Re}\,(\mathrm{w}) = -\frac{1}{10}, \mathbf{Im}\,(\mathrm{w}) = -\frac{7}{10}]$

(e) $w = (z_1)^2$ $[3-4i, \mathbf{Re}\,(\mathrm{w}) = 3, \mathbf{Im}\,(\mathrm{w}) = -4]$

(f) $w = \overline{z_1}$ $[2+i, \mathbf{Re}\,(\mathrm{w}) = 2, \mathbf{Im}\,(\mathrm{w}) = 1]$

(g) $w = \overline{z_2}$ $[1-3i, \mathbf{Re}\,(\mathrm{w}) = 1, \mathbf{Im}\,(\mathrm{w}) = -3]$

3. Vyřešte pro $x \in \mathbb{C}$ rovnici
$$1 + 2i + (2+3i)x = 4 - i.$$
$[x = -\frac{3}{13} - \frac{15}{13}i]$

Polynomy Polynomem s reálnými koeficienty nazýváme libovolný výraz tvaru $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$, kde a_i jsou nějaká reálná čísla; příkladem může být např. $2x^3 - 7x + \sqrt{3}$ a analogicky můžeme definovat i polynom s racionálními či komplexními koeficienty.

Objektům, které se z algebraického hlediska chovají jako racionální, resp. reálná, resp. komplexní čísla (tj. v tabulce z příkladu 1 mají ✓ u prvních pěti operací a splňují některé další axiomy - viz přednášku) říkáme *tělesa*. Máme-li takové těleso T, můžeme pak uvažovat množinu všech polynomů v proměnné x s koeficienty v T, kterou značíme $T[x]$ (množina všech polynomů s reálnými koeficienty má tedy značku $\mathbb{R}[x]$). I na množinách tohoto typu umíme provádět některé operace, podobně jako s čísly:

- sčítání
- odčítání
- násobení.

Operaci dělení polynomů běžně neumíme (např. polynom 2 vydělit polynomem $x-1$ neumíme: výsledek $\frac{2}{x-1}$ nemá tvar polynomu), podobně ani mocnění atd. Nanejvýš umíme polynomy dělit se zbytkem.

4. Mějme dva polynomy s reálnými koeficienty $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + 4x + 3$ a $g(x) = 3x^2 - 1x + 5$. Spočtěte

(a) $f(x) + g(x)$ $[5x^3 + 6x^2 + 3x + 8]$

(b) $f(x) - g(x)$ $[5x^3 + 5x^2 - 2]$

(c) $f(x) \cdot g(x)$. $[15x^5 + 4x^4 + 34x^3 + 20x^2 + 17x + 2]$

(d) Vydělte polynom $f(x)$ polynomem $g(x)$ se zbytkem. $[p(x) = q(x) \cdot \underbrace{(\frac{5}{3}x + \frac{14}{9})}_{kvocient} \underbrace{-(\frac{25}{9}x + \frac{43}{9})}_{zbytek}]$

Kořeny polynomů Důležitým faktem je, že pokud je číslo t kořenem polynomu $P\,(x)$, pak lze psát $P\,(x) = (x - t) \cdot P'\,(x)$, kde P' je nějaký polynom stupně o 1 menšího než je stupeň $P\,(x)$. Z toho ihned plyne, že polynom stupně n může mít nanejvýš n kořenů. Zatímco pro polynomy stupně 2 máme jasný postup, jak jejich kořeny najít, nebo se přesvědčit, že neexistují (oblíbený vzorec s diskriminantem), s polynomy vyšších stupňů je situace složitější: pro stupně 3 a 4 existují analogie k výše uvedeným vzorcům, ale jejich užití je technicky velice složité. Pro stupně 5 a vyšší je dokonce dokázáno, že žádné obecné vzorce využívající běžné operace existovat nemohou[3]!

Pokud tedy máme polynom vyššího stupně, jak nalézt jeho kořen(y)? V případě polynomu s celočíselnými koeficienty lze využít následující věty:

Pro racionální číslo $\frac{p}{q}$, které je kořenem polynomu $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ s celočíselnými koeficienty, platí, že $p|a_0$ a $q|a_n$.

[3] Jde o tzv. Abelovu-Ruffiniho větu.

Například pro polynom $4x^7 + 5x^5 - 12x^4 + 6$ tedy p může být jedině $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ a q jedině $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ a příslušné racionální kořeny mohou být jedině jejich kombinace; těch je sice 24, ale v principu je možné všechny vyzkoušet např. dosazením, či Hornerovým schématem. Rozmyslete si, jak tuto větu používat i pro polynomy s racionálními koeficienty.